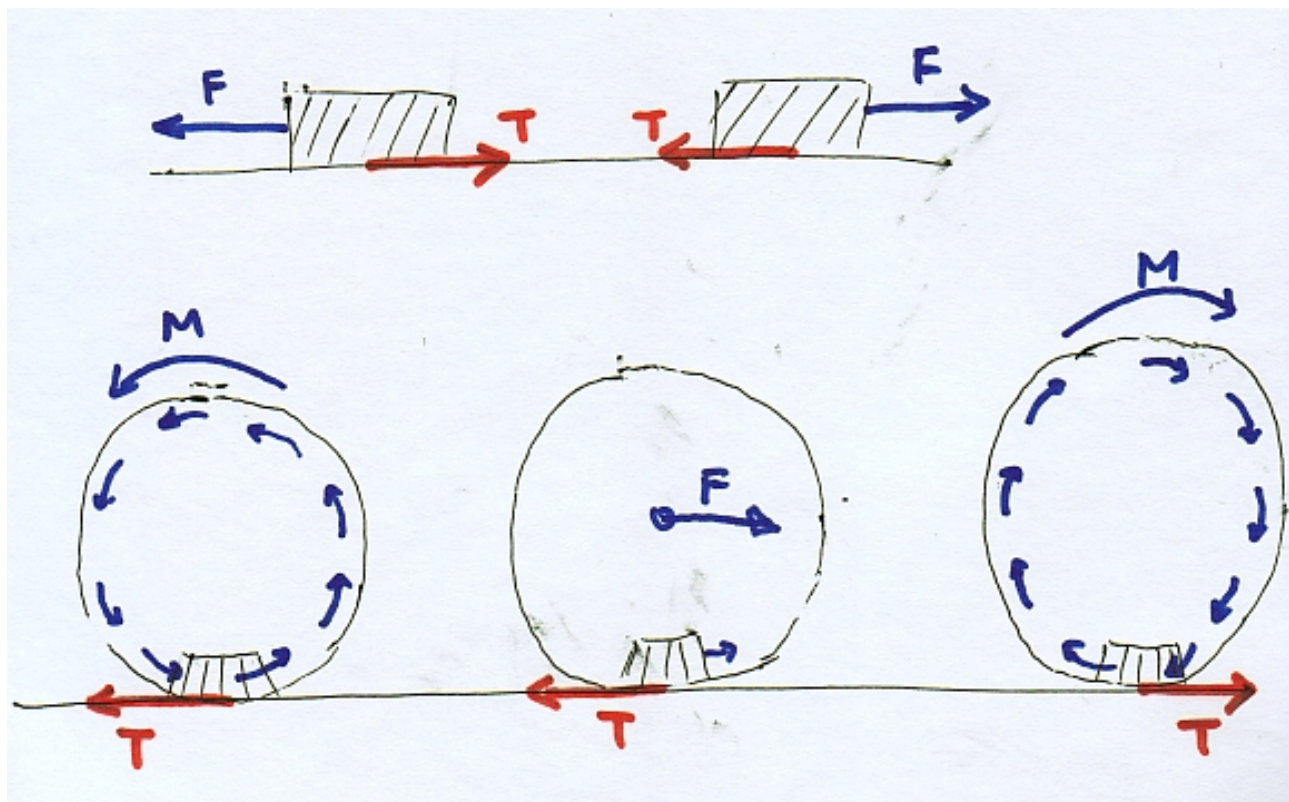


MEHANIKA KOTRLJANJA TOČKA

- Kako se određuje smer tangencijalne reakcije?

MEHANIKA KOTRLJANJA TOČKA



Smer reakcije je uvek suprotan dejstvu koje teži da izazove klizanje!
Sve ovo važi bez obzira na smer ugaone brzine!

- Aktivno spoljno dejstvo (sila ili moment) teži da izazove klizanje točka.
- Tangencijalna reakcija podloge se po smeru suprotstavlja tom klizanju.

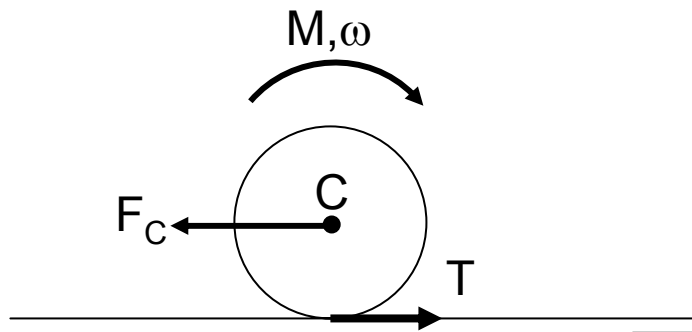
MEHANIKA KOTRLJANJA TOČKA

Kotrljanje krutog točka po krutoj podlozi

- Vrsta kretanja?
- Jednačina kretanja? (pogonski, vučeni, kočeni točak)
- Da li postoje energetske gubici?
- Da li se ovakav slučaj javlja u stvarnosti?

MEHANIKA KOTRLJANJA TOČKA

Kotrljanje krutog točka po krutoj podlozi



M – pogonski moment

ω - ugaona brzina

T – tangencijalna reakcija podloge

F_C – reakcija kojom vozilo deluje na točak

$$J_C \cdot \dot{\omega} = M - r \cdot T$$

$$m \cdot \ddot{x} = m \cdot r \cdot \dot{\omega} = T - F_C$$

Važni zaključci:

- dovedeni moment/sila se “potroši” delom na ubrzavanje a delom na savlađivanje korisnog otpora
- veći moment inercije \Rightarrow manja tangencijalna reakcija (“trošenje” momenta na ugaono ubrzanje)
- određivanje smera sile trenja – suprotno od smera dejstva koje teži da izazove relativno pomeranje!

MEHANIKA KOTRLJANJA TOČKA

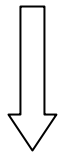
Kotrljanje točka po deformabilnoj podlozi

Kretanje van tvrdih puteva – ne spada u problematiku kursa!

MEHANIKA KOTRLJANJA TOČKA

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

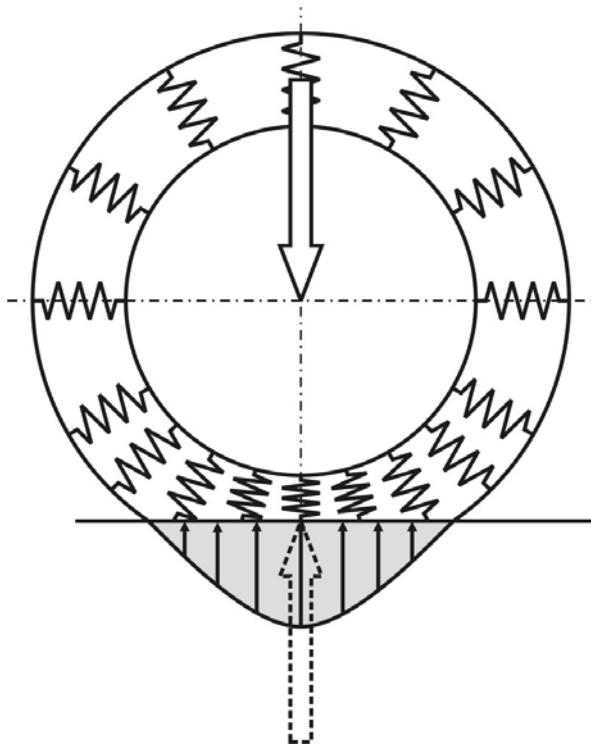
- Realan slučaj!
- Razlika u odnosu na prethodno razmatrani slučaj:
unutrašnje trenje u pneumatiku → energetske gubitke!



POJAVA OTPORA KOTRLJANJA

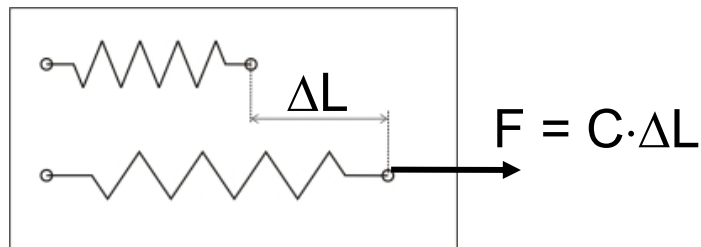
MEHANIKA KOTRLJANJA TOČKA

Vertikalno opterećenje deformabilnog točka koji miruje na krutoj podlozi



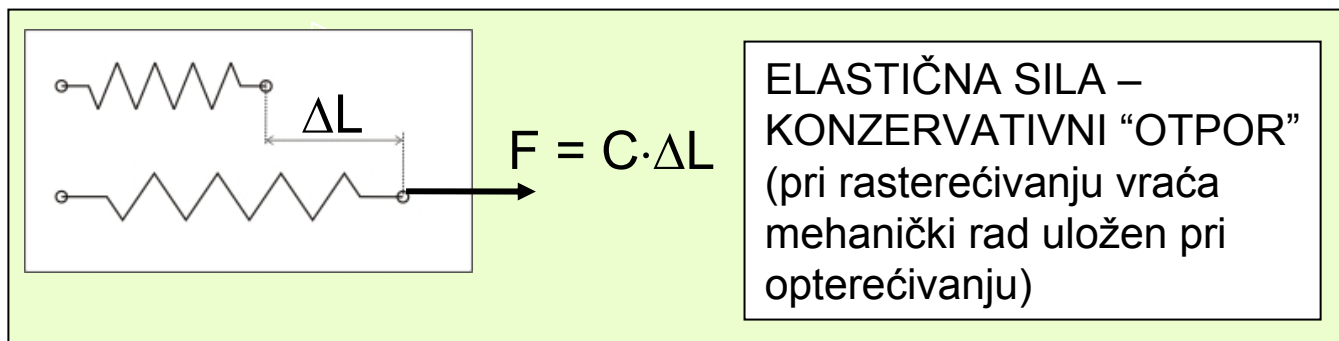
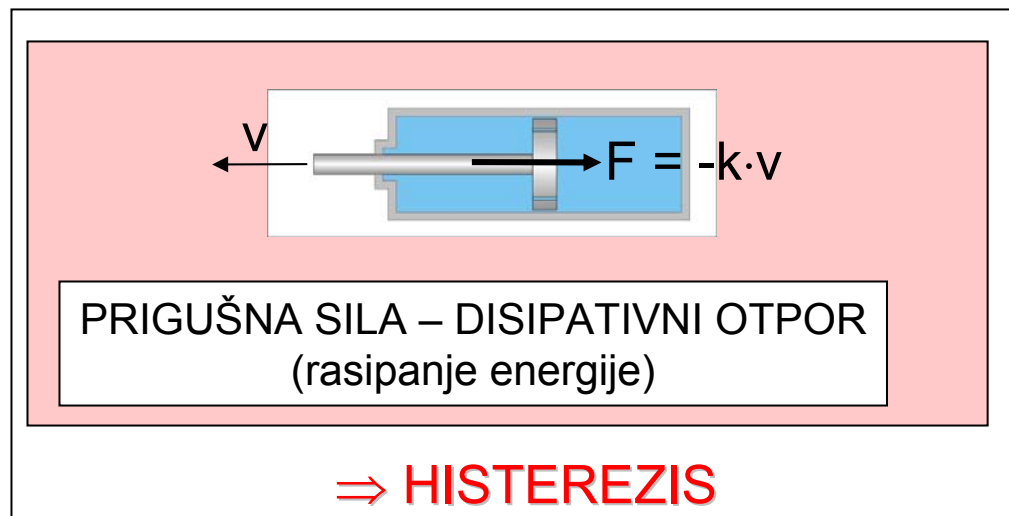
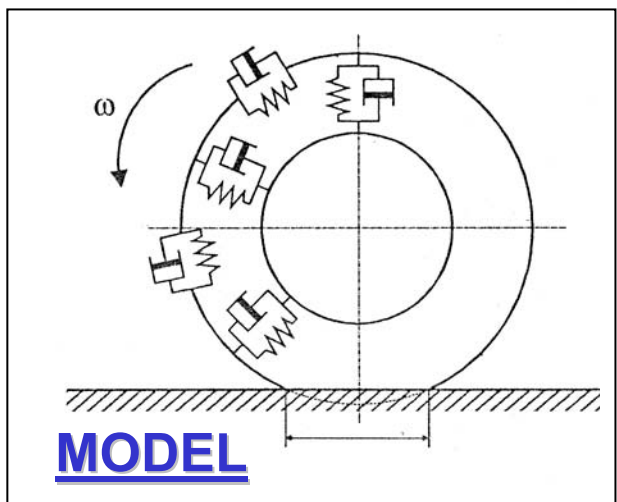
- Raspodela opterećenja je simetrična
- Rezultanta je sučeona sa spoljnim opterećenjem
- Sistem je u statičkoj ravnoteži

ELASTIČNA SILA JE TIM
VEĆA ŠTO JE VEĆA
DEFORMACIJA



MEHANIKA KOTRLJANJA TOČKA

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

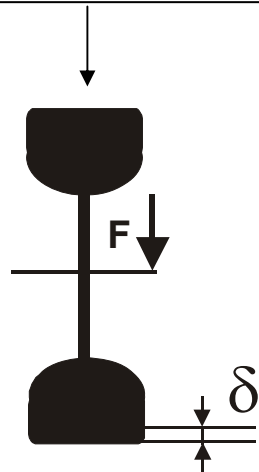


MEHANIKA KOTRLJANJA TOČKA

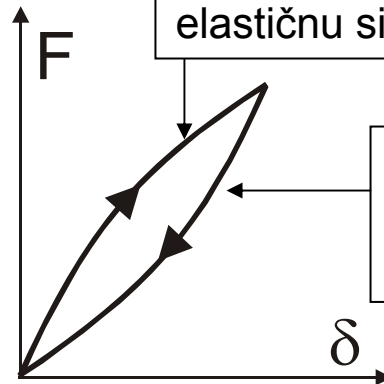
Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

HISTEREZIS – mera energetskih gubitaka usled unutrašnjeg trenja

Gumeni uzorak ispitujemo naizmeničnim istežanjem i sabijanjem



Pri opterećivanju uzorka savlađujemo elastičnu silu i silu unutrašnjeg trenja



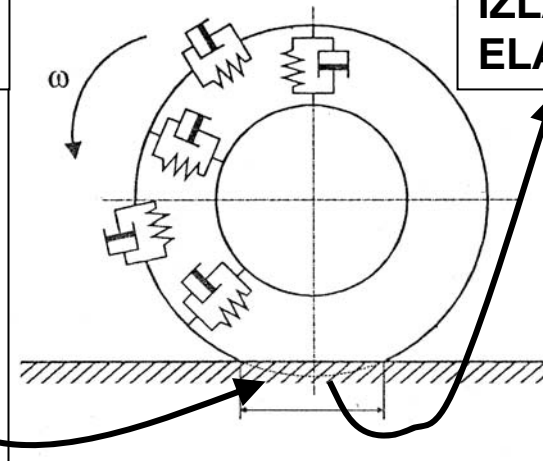
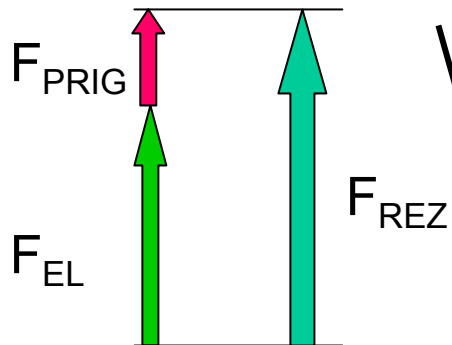
Pri rasterećivanju vraća nam se rad elastične sile, ali sada taj rad savlađuje i silu unutrašnjeg trenja

Sila pri rasterećivanju je manja za istu veličinu deformacije

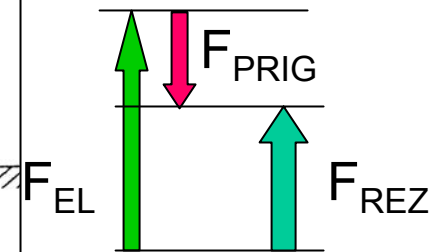
Razlika → mera gubitaka

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi – uticaj histerezisa

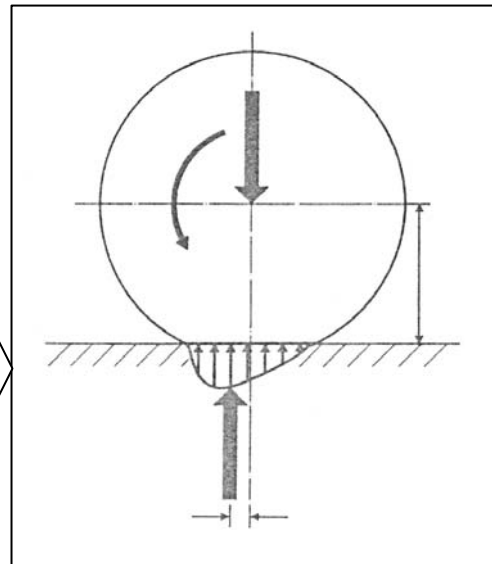
**ULAZAK U ZONU KONTAKTA:
ELASTIČNA + PRIGUŠNA SILA**



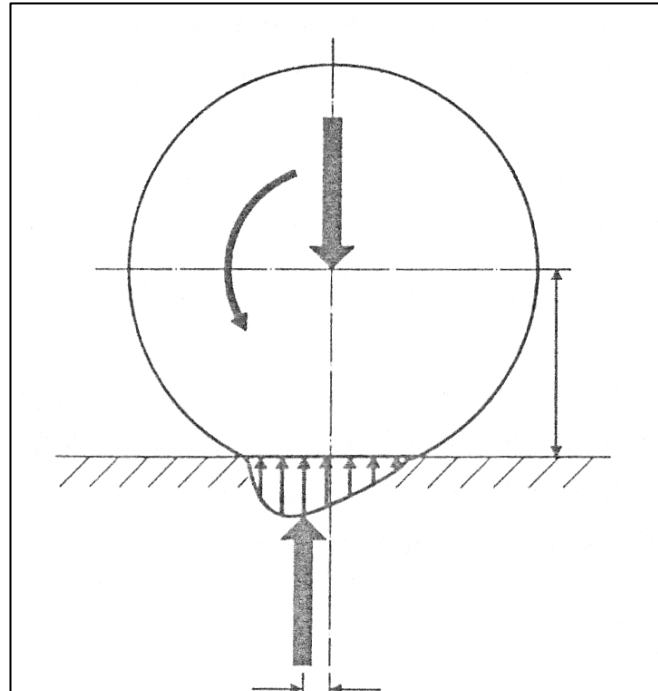
**IZLAZAK IZ ZONE KONTAKTA:
ELASTIČNA - PRIGUŠNA SILA**



**POSLEDICA:
ASIMETRIČNA
RASPODELA
VERTIKALNE REAKCIJE**



Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi – uticaj histerezisa



Težište krive zakonitosti kontinualnog opterećenja se premešta ISPRED ose simetrije točka, a time i rezultujuća vertikalna reakcija!

**Posledica: vertikalna reakcija stvara moment koji se suprotstavlja kotrljanju točka ⇒
NASATANAK OTPORA KOTRLJANJA (OTPOR HISTEREZISA)**

Ovo važi uvek! (pogonski, kočeni, slobodan točak)

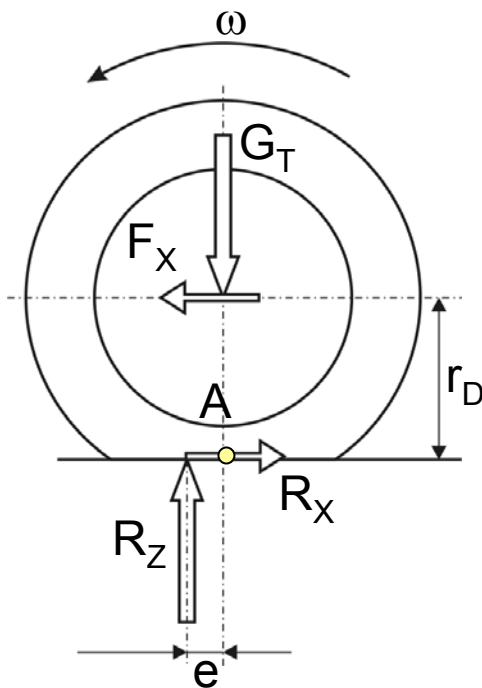
Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

Kolika je tangencijalna reakcija u pojedinim slučajevima?

- Slobodan točak
 - Pogonski točak
 - Kočeni točak
-
- Ustaljeno kretanje
 - Ubrzano ili usporeno kretanje

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

NEPOGONSKI TOČAK (slobodno kotrljanje)



SILE KOJE DELUJU NA TOČAK:

G_T – vertikalno opterećenje točka

R_Z – vertikalna reakcija podloge

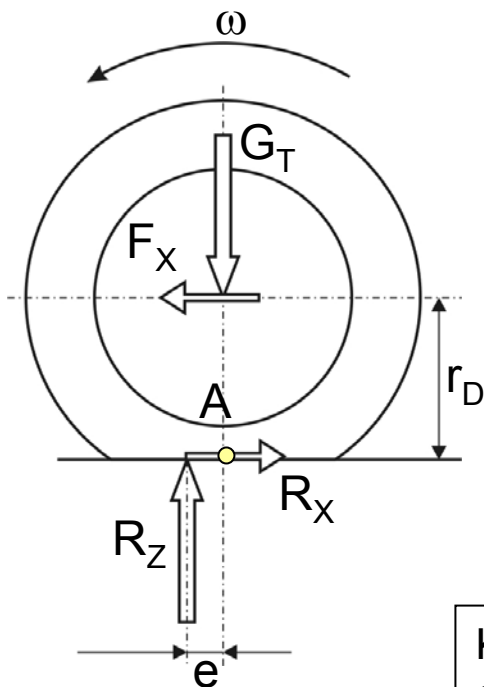
F_x – horizontalna reakcija između vozila i točka
(ovde: sila kojom vozilo povlači točak)

R_x – tangencijalna reakcija između točka i podloge

e – ekscentricitet vertikalne reakcije

r_D – dinamički radijus točka

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

NEPOGONSKI TOČAK (slobodno kotrljanje)

Ustaljeno kretanje (statika):

$$\Sigma Z_i \Rightarrow R_Z = G_T$$

$$\Sigma X_i \Rightarrow R_X = F_X$$

$$\Sigma M_A \Rightarrow e \cdot R_Z = r_D \cdot F_X \quad | /r_D$$

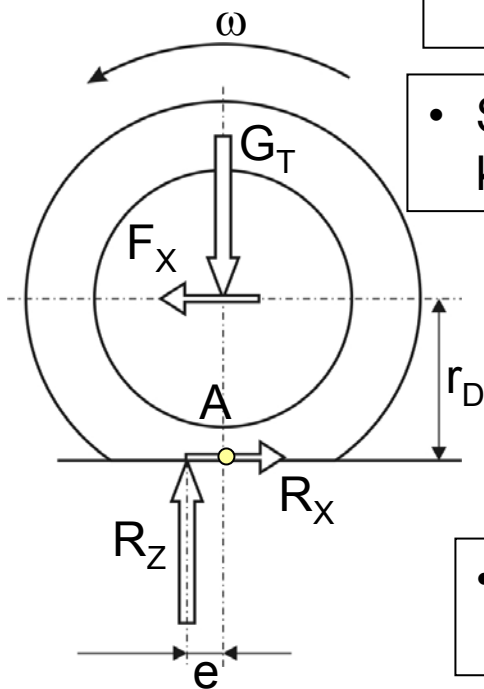
$$\Rightarrow R_X = \frac{e}{r_D} \cdot G_T$$

$$\frac{e}{r_D} = f \rightarrow \text{koeficijent otpora kotrljanja}$$

Koeficijent f → empirijsko određivanje odnosa e/r_D uz uzimanje u obzir ostalih uzroka nastanka otpora kotrljanja točka.

$$f \cdot G_T \equiv F_{fT} - \text{SILA OTPORA KOTRLJANJA TOČKA}$$

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

NEPOGONSKI TOČAK (slobodno kotrljanje)

$$\mathbf{f \cdot G_T \equiv F_{fT} - \text{SILA OTPORA KOTRLJANJA TOČKA}}$$

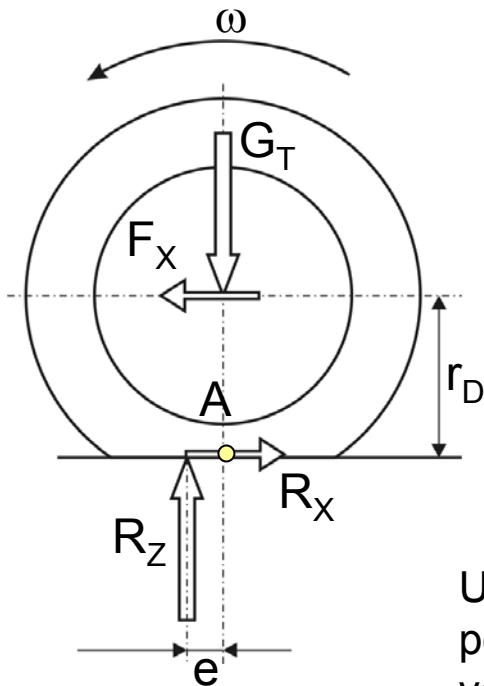
- Sila otpora kotrljanja proporcionalna je koeficijentu otpora kotrljanja i vertikalnom opterećenju točka.

$$R_x = \frac{e}{r_D} \cdot G_T = f \cdot G_T = F_{fT}$$

- Tangencijalna reakcija slobodnog točka jednaka je sili otpora kotrljanja.

Obično je $f \sim 0,01 \rightarrow$ detaljnije u nastavku...

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

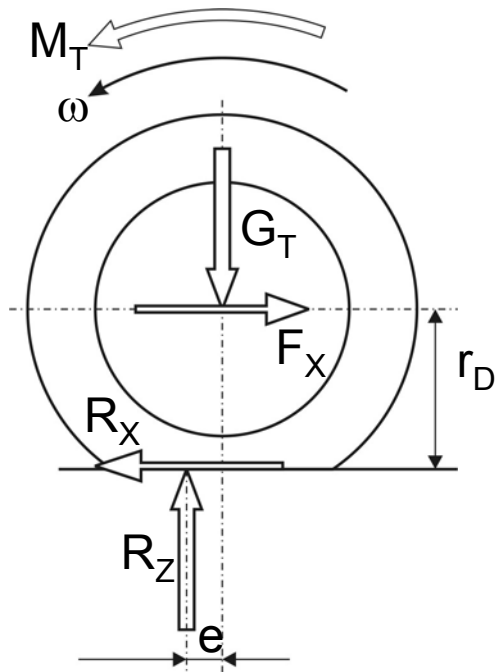
NEPOGONSKI TOČAK (slobodno kotrljanje)

$$F_x = R_x = f \cdot G_T = F_{fT}$$

- aktivna sila koju moramo saopštiti slobodnom točku da bi se kotrljao

Uslov za nastanak sile R_x je trenje (prijanjanje) između točka i podloge - na podlozi bez trenja slobodan točak se ne bi kotrljao već bi klizao translatorno!

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

POGONSKI TOČAK PRI USTALJENOM KRETANJU ($v=\text{const}$)

M_T – pogonski obrtni moment na točku
 F_X – horizontalna reakcija između vozila i točka
 (ovde: sila kojom vozilo zadržava točak)

$$\Sigma Z_i \Rightarrow R_Z = G_T$$

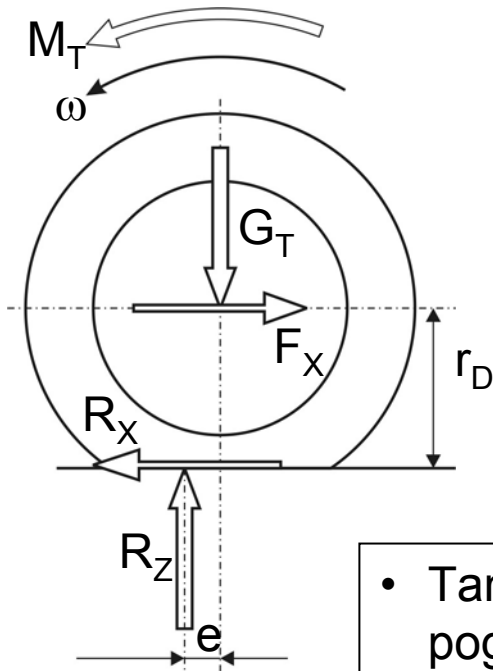
$$\Sigma X_i \Rightarrow R_X = F_X$$

$$\Sigma M_A \Rightarrow M_T = e \cdot R_Z + r_D \cdot F_X \quad | /r_D$$

$$\frac{M_T}{r_D} \equiv F_O \rightarrow \text{definicija}$$

F_O – obimna (vučna) sila na točku → fiktivna (tj. računska) veličina!

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

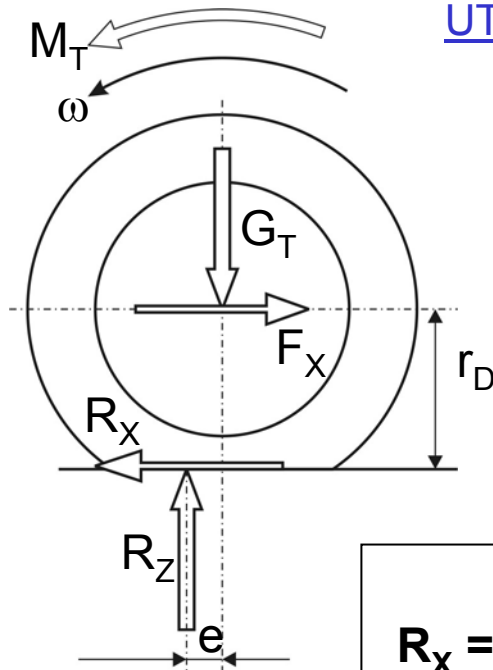
POGONSKI TOČAK PRI USTALJENOM KRETANJU ($v=\text{const}$)

$$R_x = \frac{M_T}{r_D} - \frac{e}{r_D} \cdot G_T$$

$R_x = F_o - F_f \rightarrow$ stvarna tangencijalna reakcija na pogonskom točku

- Tangencijalna reakcija pogonskog točka jednaka je odnosu pogonskog momenta i dinamičkog radijusa točka, umanjenom za vrednost otpora kotrljanja.

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

POGONSKI TOČAK PRI UBRZANOM KRETANJU ($a > 0$)UTICAJ MOMENTA INERCIJE

Druga jednačina ravanskog kretanja za točak:

$$J_C \cdot \dot{\omega} = -r_D \cdot R_x - M_f + M_T$$

$$M_f = e \cdot G_T \quad F_o \equiv \frac{M_T}{r_D} \quad \dot{\omega} > 0$$

$$R_x = F_o - F_f - \frac{J_C \cdot \dot{\omega}}{r_D} \rightarrow \text{stvarna tangencijalna reakcija na pogonskom točku pri ubrzanom kretanju}$$

Deo pogonskog momenta saopštenog točku se “troši” na savlađivanje MOMENTA INERCIJE tj. na ubrzanje obrtnih masa, drugi deo se “troši” na savlađivanje sopstvenog otpora kotrljanja točka; ostatak R_x je na raspolaganju za savlađivanje otpora F_x i transl. ubrzanje točka

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

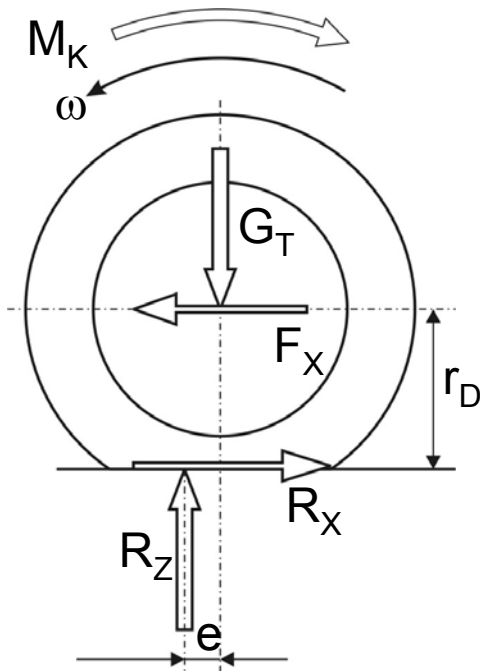
KOČENI TOČAK PRI USTALJENOM KRETANJU ($v=\text{const}$)Slučaj: kočenje na nizbrdici radi održavanja brzine M_K – kočni moment na točku F_X – horizontalna reakcija između vozila i točka
(ovde: sila kojom vozilo gura točak)

$$\Sigma Z_i \Rightarrow R_Z = G_T$$

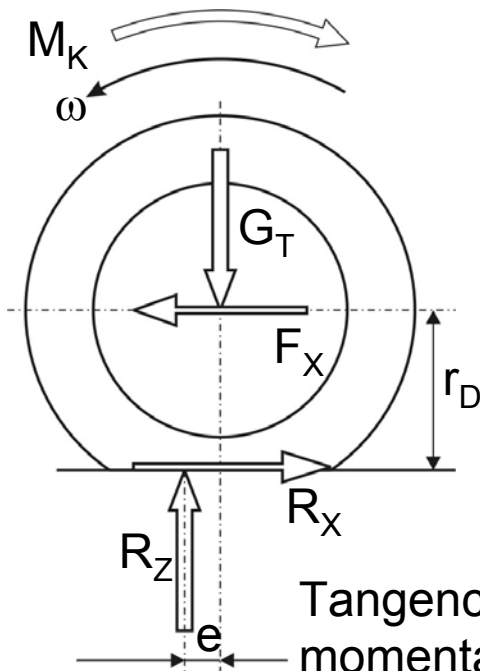
$$\Sigma X_i \Rightarrow R_X = F_X$$

$$\Sigma M_A \Rightarrow r_D \cdot F_X = M_K + e \cdot R_Z \quad | /r_D$$

$$\frac{M_K}{r_D} \equiv F_K \rightarrow \text{definicija}$$

 F_K – kočna sila na točku → fiktivna (računska) veličina!

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

KOČENI TOČAK PRI USTALJENOM KRETANJU ($v=\text{const}$)

$$R_X = \frac{M_K}{r_D} + \frac{e}{r_D} \cdot G_T$$

$R_X = F_K + F_f \rightarrow$ stvarna tangencijalna reakcija na kočenom točku

Tangencijalna reakcija kočenog točka jednaka je odnosu kočnog momenta i dinamičkog radijusa točka, uvećanom za vrednost otpora kotrljanja.

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

KOČENI TOČAK PRI USPORENOM KRETANJU ($a < 0$)UTICAJ MOMENTA INERCIJE

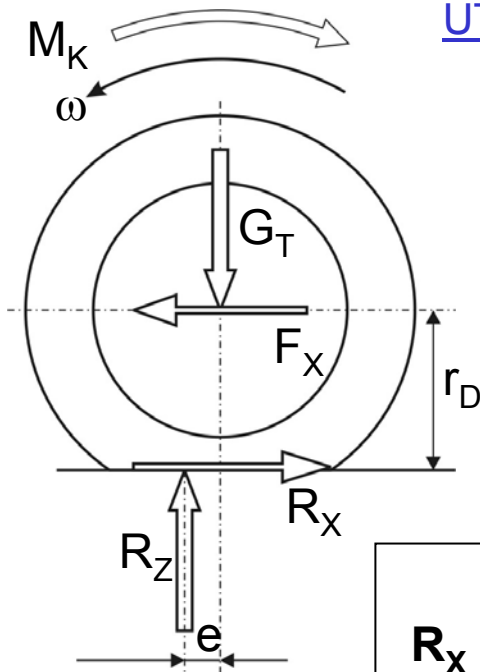
Druga jednačina ravanskog kretanja za točak:

$$J_C \cdot \dot{\omega} = r_D \cdot R_x - M_f - M_K$$

$$M_f = e \cdot G_T \quad F_K \equiv \frac{M_K}{r_D} \quad \dot{\omega} < 0$$

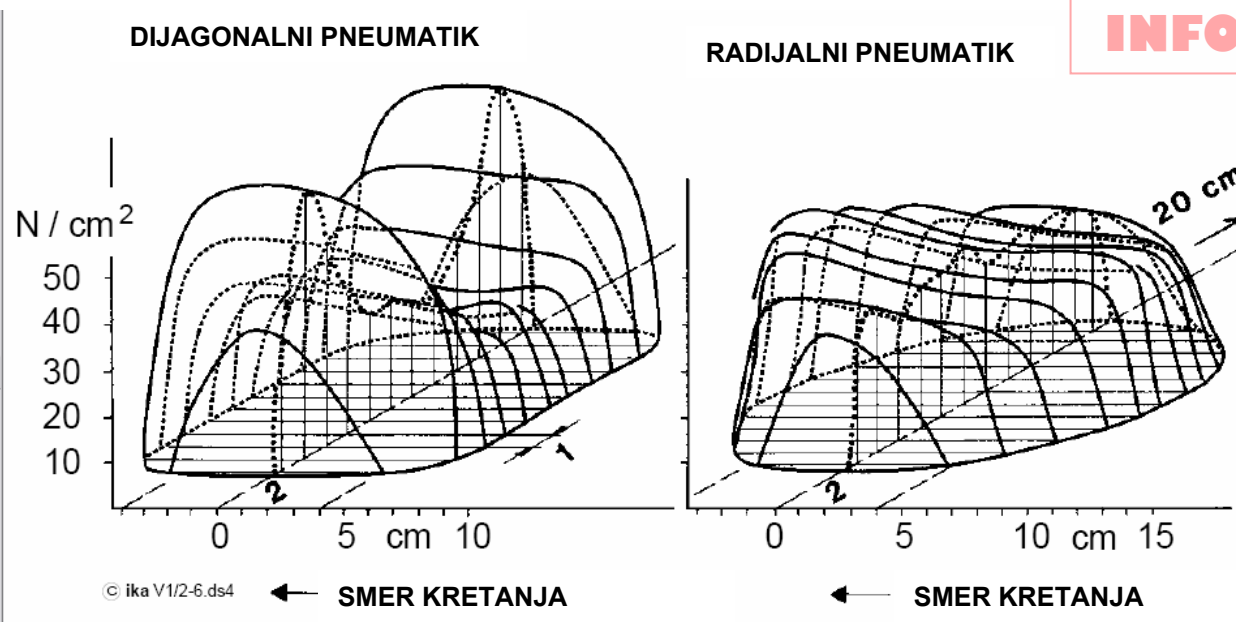
$$R_x = F_K + F_f - \frac{J_C \cdot |\dot{\omega}|}{r_D} \rightarrow \text{stvarna tangencijalna reakcija na kočenom točku pri usporenju}$$

Analogija sa ubrzanjem: deo kočnog momenta se "troši" na usporavanje obrtnih masa, ostatak je na raspolaganju za translatorno usporenje – R_x ; otpor kotrljanja pomaže kočenju!

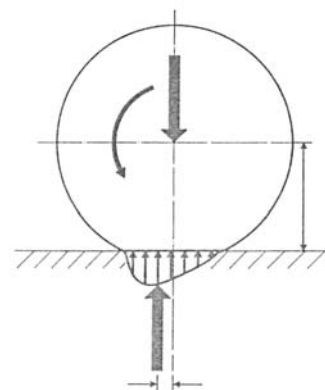


OTPOR KOTRLJANJA TOČKA

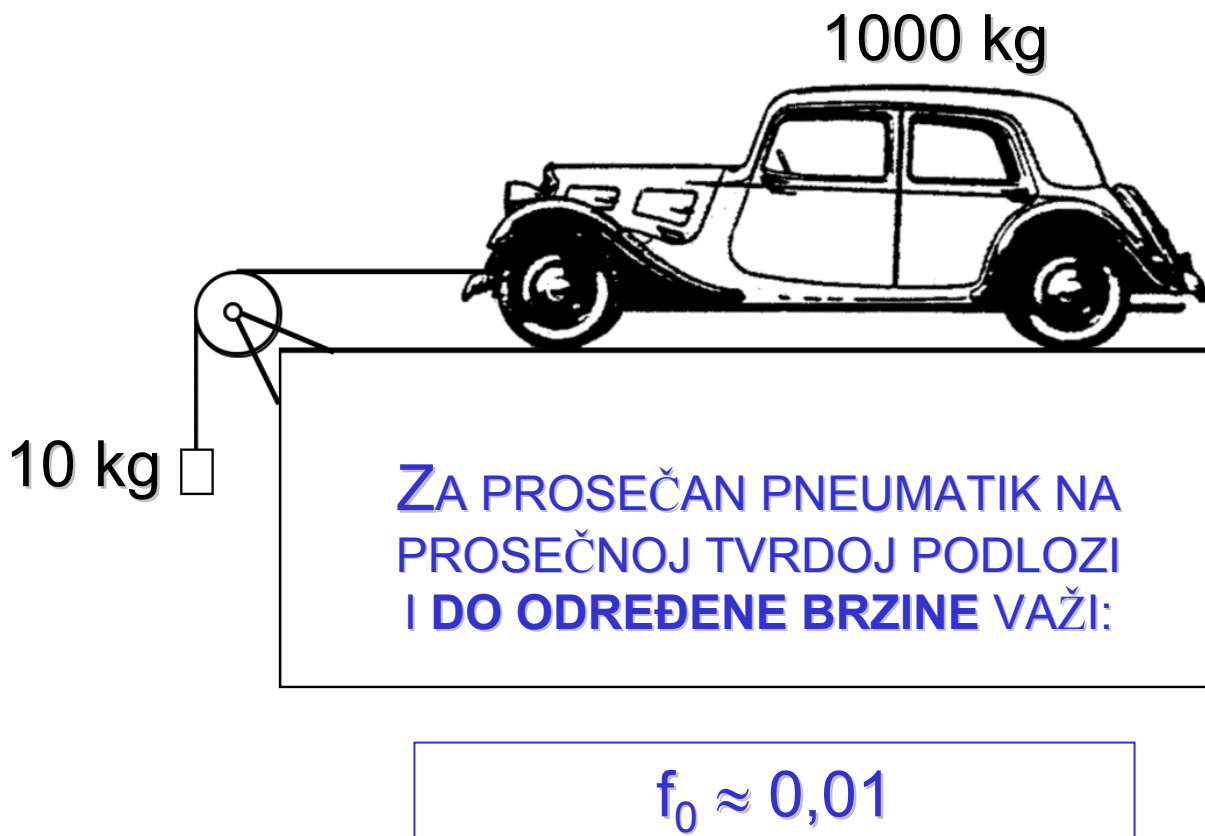
Raspored kontaktnih pritisaka za radialni i dijagonalni pneumatik

Izvor: *Walentowitz*

Pojednostavljeni prikaz →



Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori



Šta tačno znači “do određene brzine”? → *u nastavku...*
Orientaciono ~ 100 km/h

Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

INFORMATIVNO

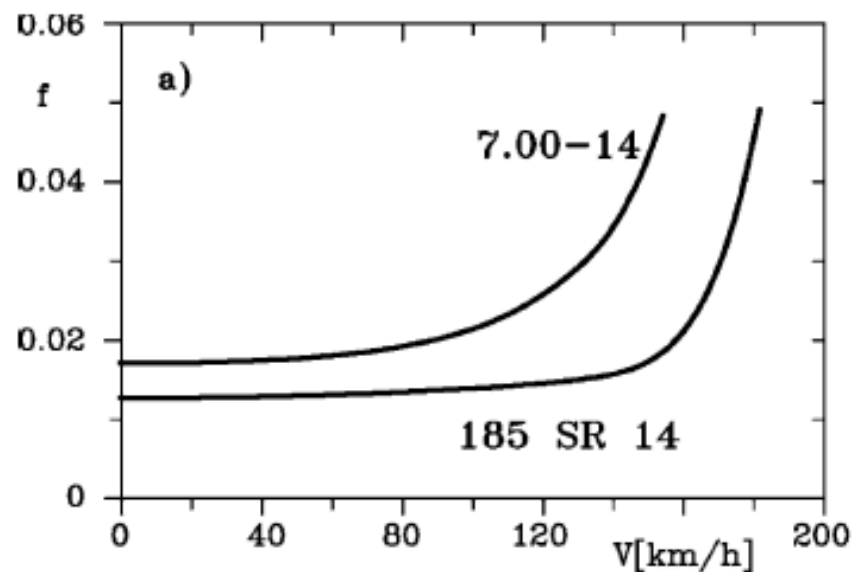
Vrsta i stanje tla	f	
	Točak	Gusenica
Asfalt (odličan)	0,010-0,018	
Asfalt (prosečan)	0,018-0,020	
Asfalt (loš)	0,020-0,023	
Beton (odličan)	0,011-0,020	
Beton (loš)	0,020-0,030	
Makadam (odličan)	0,013-0,018	
Makadam (prosečan)	0,018-0,023	
Makadam (loš)	0,023-0,040	
Zemljani put (utaban)	0,025-0,035	0,050-0,070
Zemljani put (prosečan)	0,050-0,080	
Zemljani put (loš, blato)	0,160-0,200	0,100-0,150
Pesak (vlažan)	0,150-0,300	0,100-0,150
Strnjika	0,080-0,100	0,060-0,080
Oranica	0,120-0,180	0,080-0,100
Polje pripremljeno za setvu	0,160-0,180	0,090-0,120
Utaban put u snegu	0,030-0,040	0,060-0,070

ORIJENTACIONE VREDNOSTI ZA f (za male brzine)

Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

UTICAJ BRZINE

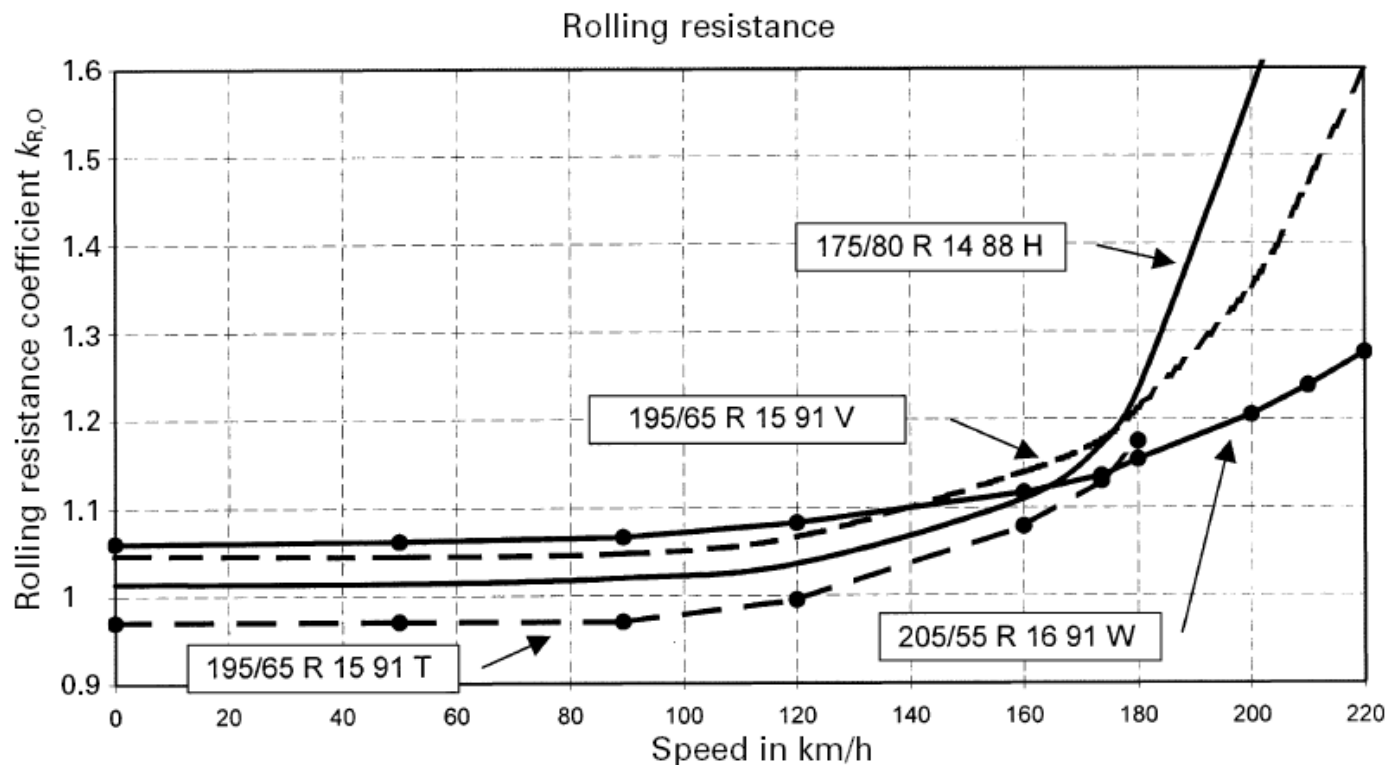
Pri početnom porastu brzine – za širi dijapazon – blag porast;
pri većim brzinama nagli!



Izvor: *Genta/Morello*

Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

UTICAJ BRZINE



Izvor: Reimpell

Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

UTICAJ BRZINE

Empirijska relacija – opšti oblik:

$$f = C_0 + C_1 \cdot v + C_2 \cdot v^2 + C_3 \cdot v^3 + C_4 \cdot v^4 + \dots$$

Primer:

$$f = f_0 + C_1 \cdot v + C_2 \cdot v^4, \quad v \text{ (km/h)}$$

$$f_0 = 0,01$$

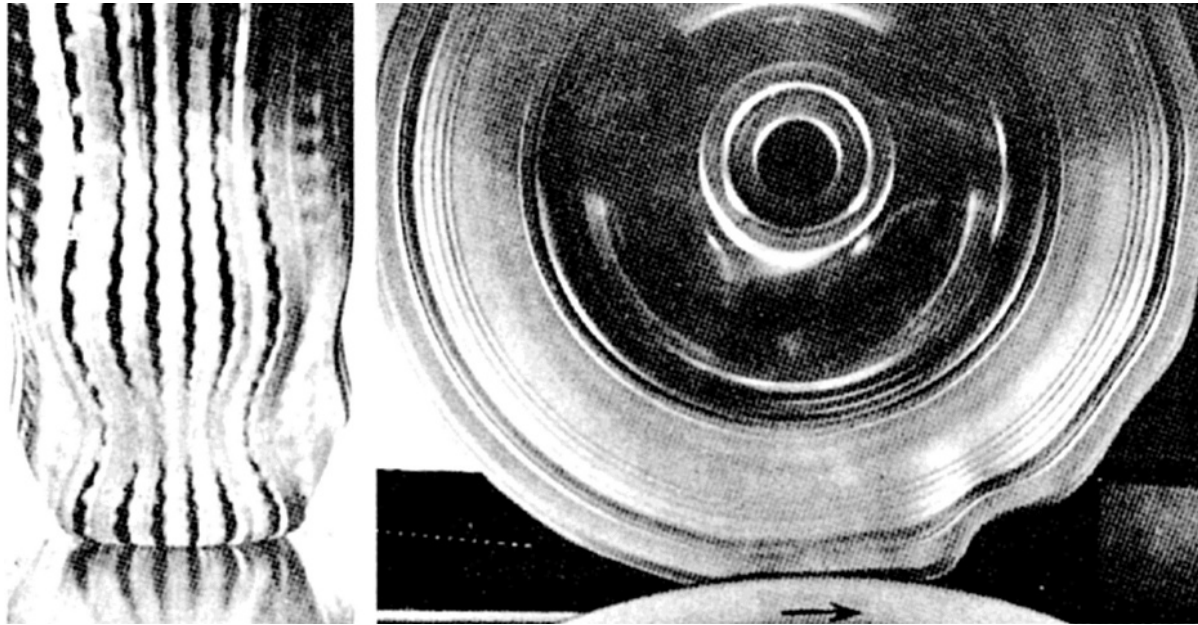
$$C_1 = 5,42 \cdot 10^{-6}$$

$$C_2 = 1,05 \cdot 10^{-11}$$

Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

UTICAJ BRZINE

Izvor: *Genta / Morello*



Šta ograničava maksimalnu brzinu kretanja za određeni pneumatik?

Formira se stojeći deformacijski talas koji dovodi do razaranja pneumatika!

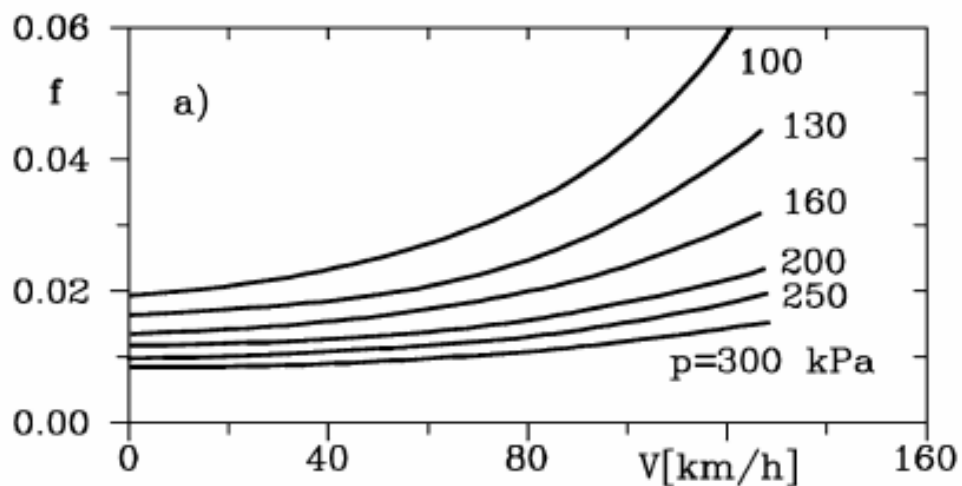
Pri neodgovarajućim pritiscima može doći do pregrevanja i devulkanizacije zbog pretvaranja deformacijskog rada u toplotu!

Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

UTICAJ PRITISKA

Viši pritisak \Rightarrow manja deformacija \Rightarrow manji otpor kotrljanja

Vrednosti ograničene zahtevima za prijanjanje, udobnost, habanje

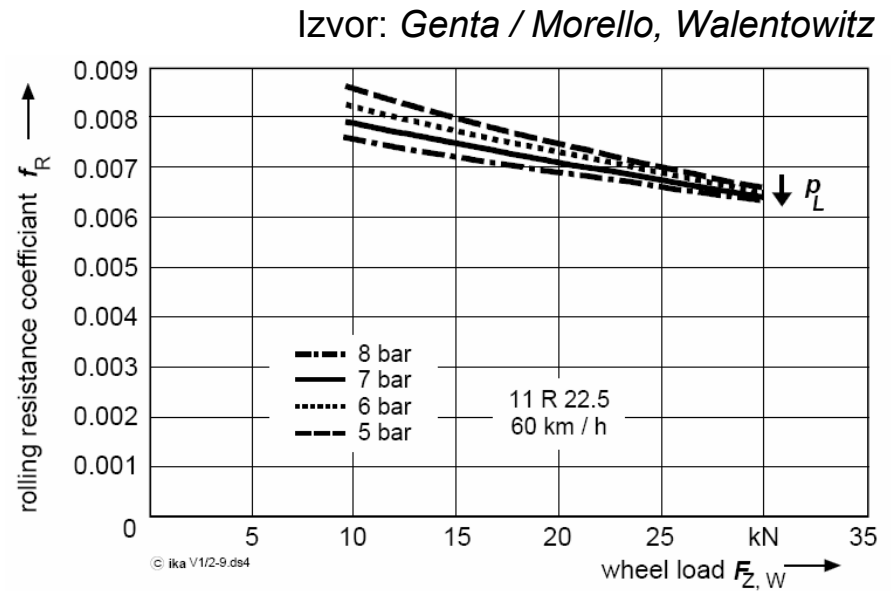
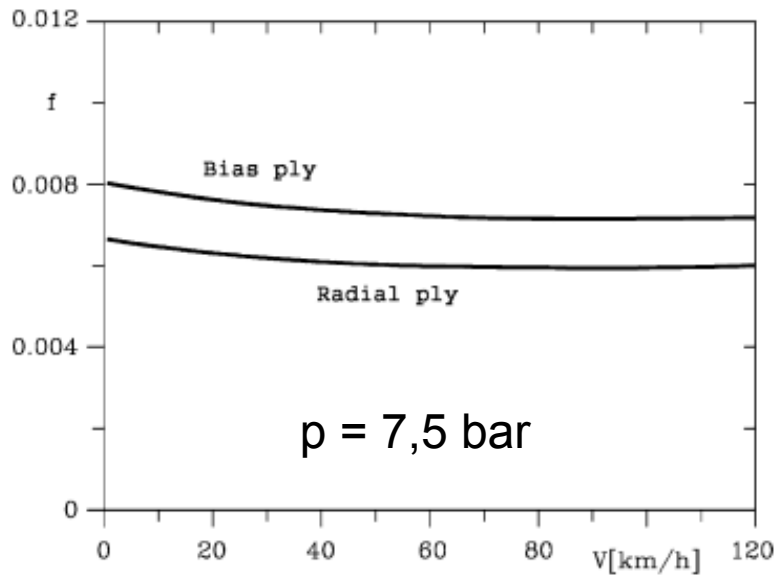


Izvor: *Genta / Morello*

Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

UTICAJ BRZINE I OPTEREĆENJA ZA PNEUMATIKE KOMERCIJALNIH VOZILA

INFORMATIVNO



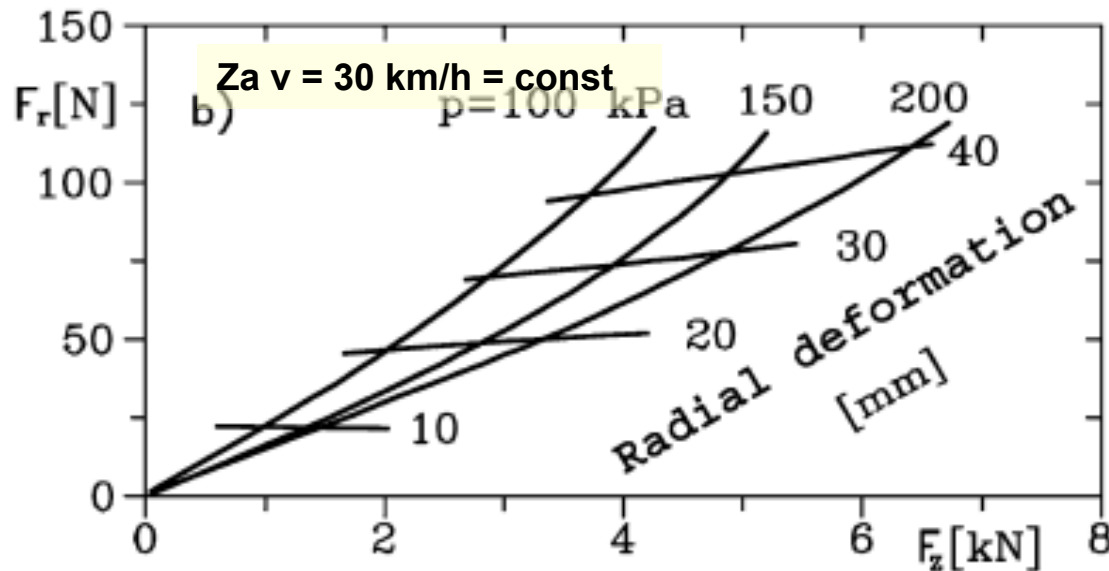
!? → Moguće objašnjenje: uticaj frekvencije i amplitude pobude na unutrašnje trenje unutar konstruktivnih slojeva pneumatika

Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

UTICAJ VERTIKALNOG OPTEREĆENJA

INFORMATIVNO

Povećanje opterećenja: analogno sniženju pritiska (dužina kontaktne zone raste)



Izvor: Genta / Morello

Empirijska relacija:
$$f = \frac{K'}{1000} \left(5,1 + \frac{5,5 \times 10^5 + 90F_z}{p} + \frac{1100 + 0,0388F_z V^2}{p} \right)$$

U praksi se uticaj G_T na f obično ne razmatra.

Ovo je opravdano ako se pođe od pretpostavke da je **pritisak prilagođen povećanom opterećenju** pa time i defleksija ostaje ista!

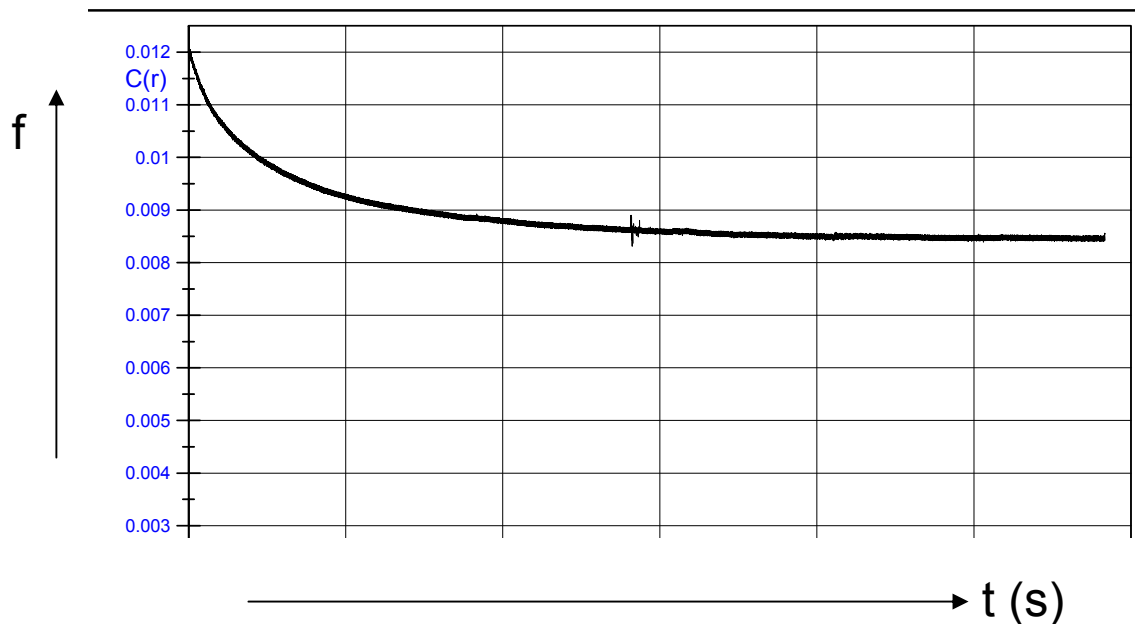
Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

UTICAJ TEMPERATURE

INFORMATIVNO

$f \Rightarrow T \uparrow \Rightarrow Q \uparrow;$

$T \uparrow \Rightarrow p \uparrow \Rightarrow f \downarrow$ - do formiranja ravnotežnog stanja



Izvor: *B. Wagner*

Primer: za brzinu od 140 km/h ravnotežna temperatura je reda veličine 100°C

(*Genta / Morello, str. 84*)

Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

UTICAJ KONSTRUKTIVNIH PARAMETARA PNEUMATIKA

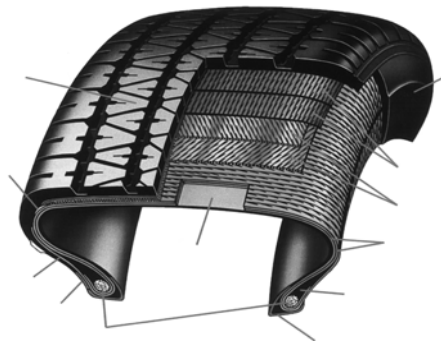
Koeficijent f opada sa:

INFORMATIVNO

- povećanjem dimenzija pneumatika
- smanjenjem odnosa visine prema širini (ukrućenje boka, manji histerezis)
- poboljšanjem sastava smeše gume – smanjenje histerezisa

Struktura otpora histerezisa:

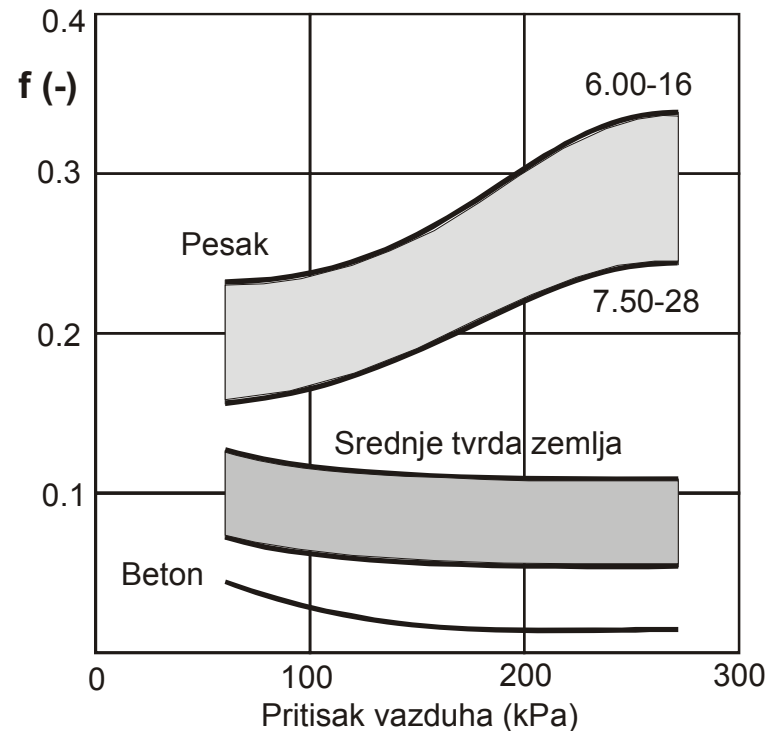
- 50% - gazeći sloj
- 20% - pojas
- 10% - karkasa
- 10% - bok



Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

UTICAJ VRSTE I STANJA PODLOGE

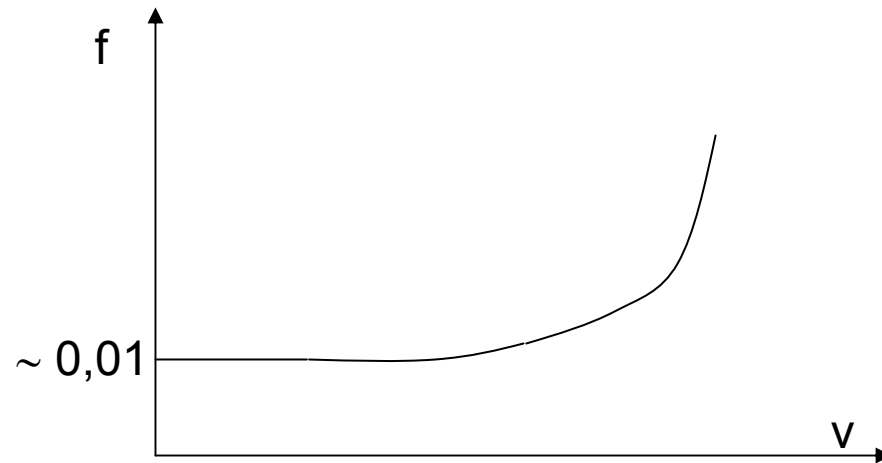
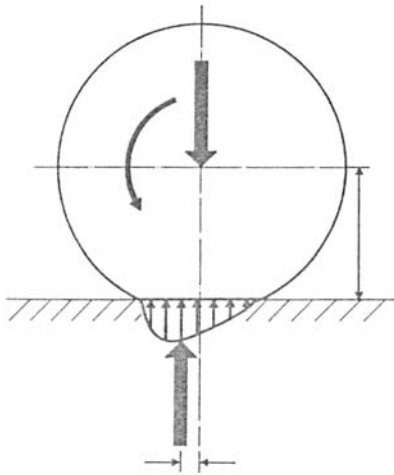
- neravna podloga – povećan histerezis
- prisustvo vlage (otpor vodenog filma, prilepljivanje pneumatika za tlo)
- meka podloga – uticaj deformacije



Otpor kotrljanja točka – ostali izvori nastanka

- bočno povodjenje točka (“scrubbing off speed”)
- geometrija točka (bočni nagib, usmerenost)
- trenje klizanja u kontaktnoj površini (tangencijalno sabijanje u gazećem sloju)
- trenje u ležaju točka
- zaostali moment kočenja
- moment na točku (pogonski, kočeni, slobodan)
- itd.

OTPOR KOTRLJANJA - REZIME



Glavni eksploatacioni faktori koji utiču na otpor kotrljanja:

- brzina
 - pritisak
 - vertikalno opterećenje
- RAZMATRA SE RAČUNSKI
 } → OBIČNO SE NE RAZMATRAJU
 RAČUNSKI – smatra se da su
 međusobno usklađeni